| Lycée de Souassi<br>***<br>**DEVOIR DE SYNTHESE N° 1**<br>***<br>08/12/2010 | **SECTIONS** : *4ème Sciences Expérimentales* **2 & 3**<br>**EPREUVE** : *Mathématiques*<br>**DUREE** : *2 heures*<br>**PROFESSEUR** : *Mr Wissem Filgène* |
|---|---|

**Exercice 1** : (3 pts)

*Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis* ***justifier cette réponse****.*

*Une réponse non justifiée est considérée comme fausse.*

On donne le tableau de variation d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

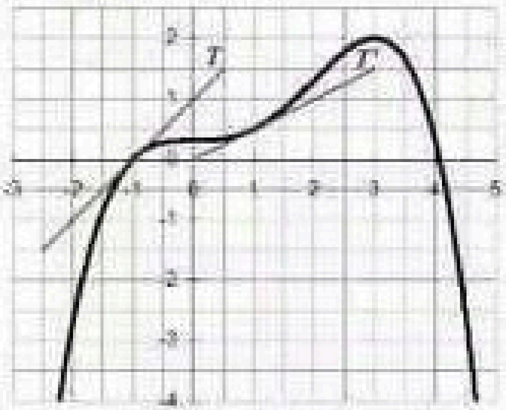
1) L'équation $f(x)=0$ admet :

A. une solution B. deux solutions C. trois solutions

2) On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$. On peut affirmer que :

A. $f'(-2)\times f'(1)\leq 0$ B. $f'(2)\times f'(5)\geq 0$ C. $f'(4)\times f'(7)\geq 0$

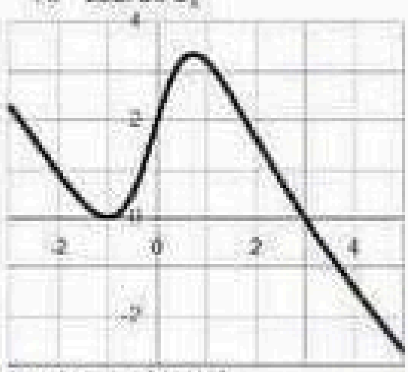
3) On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction . Les droites $T$ et $T'$ sont tangentes à la courbe aux points d'abscisses respectives $-1$ et $1$



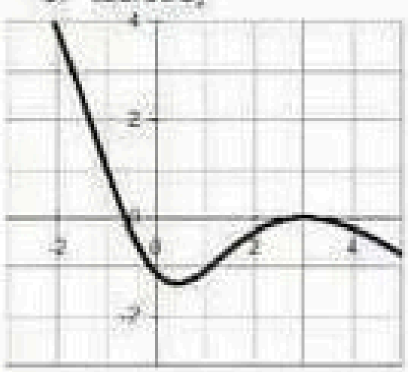
A. $f'(-1)=0$ B. $f'(-1)=2\times f'(1)$ C. $f'(1)=2\times f'(-1)$

4) Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f'$. Déterminer laquelle.

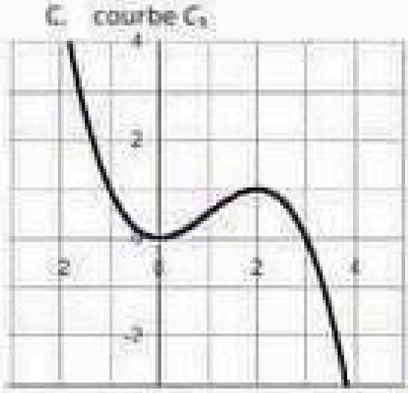
A. courbe $C_1$



B. courbe $C_2$



C. courbe $C_3$



**Exercice 2** : (5 pts)

On définit les suites $(U)$ et $(V)$ par $\begin{cases}U_0=1\\V_0=2\end{cases}$ et $\begin{cases}U_{n+1}=\dfrac{U_n+2V_n}{3}\\V_{n+1}=\dfrac{U_n+4V_n}{5}\end{cases}$ pour $n\in\mathbb{N}$

On pose $W_n = V_n - U_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que la suite $(W)$ est géométrique et préciser sa limite
2) Exprimer $W_n$ en fonction de $n$ et en déduire que $U_n \leq V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de $W_n$
   En déduire le sens de variation des suites $(U)$ et $(V)$
4) Justifier que $(U)$ et $(V)$ convergent vers la même limite $l$.
5) On pose $T_n = 3U_n + 10V_n$, pour $n \in \mathbb{N}$
   a) Démontrer que la suite $(T_n)$ est constante.
   b) En déduire la valeur de $l$.

**Exercice 3** : (6 pts)

On considère l'équation $(E)$ : $2z^2 - 4z + 3 - i\sqrt{3} = 0$

1) Calculer $(1 + i\sqrt{3})^2$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$
   b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$ et $C$ d'affixes respectives $\alpha = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$
   a) Montrer que $OAC$ est un triangle rectangle
   b) Déterminer l'affixe du point $B$ tel que $OABC$ soit un rectangle
4) Soit l'équation $(E_\theta)$ : $z^2 - 2z - 2i\sin\theta\, e^{i\theta} = 0$ ; avec $\theta \in ]0, \pi[$
   a) Montrer que : $2i\sin\theta\, e^{i\theta} = e^{2i\theta} - 1$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta)$ .On désignera par $z'$ la solution ayant une partie imaginaire négative et par $z''$ l'autre solution
   c) Déterminer $\theta$ pour que l'on ait $z' = \alpha$ et $z'' = \beta$

**Exercice 4** : (6 pts)

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$ et $\zeta_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Etudier les variations de $f$
   b) Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera.
   c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.
   d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in ]1, 2[$.
2) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
3) Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite qu'on précisera.